OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1913. N° 2.

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES.

PAR

N. E. NÖRLUND.

Par une série de puissances hypergéométrique on entend une série de la forme

$$1+\frac{\alpha_0\cdot\alpha_1\,..\,\alpha_n}{1\cdot\beta_1\,..\,\beta_n}z+\frac{\alpha_0(\alpha_0+1)\,\alpha_1(\alpha_1+1)\dots\alpha_n(\alpha_n+1)}{1\cdot 2\cdot\beta_1(\beta_1+1)\dots\beta_n(\beta_n+1)}z^2+\dots$$

Considérée comme fonction de z cette série satisfait, comme on sait, à une équation différentielle linéaire. Le cas $n=1$ est particulièrement remarquable et il a fait l'objet de travaux maintenant classiques et dûs notamment à Euler, Gauss, Kummer, Riemann et M. Schwarz. Dans les pages suivantes j'étudierai une certaine classe de fonctions qui se représentent par des séries de la forme susdite, mais je considère comme variable un des nombres α ou β. Ce sont donc des séries de facultés hypergéométriques dont nous allons nous occuper. Ces fonctions satisfont à une équation aux différences finies linéaire et du second ordre. Cette équation occupe dans la théorie des équations aux différences la même place que l'équation de Gauss

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)z)\frac{dy}{dz}-\alpha\beta y=0$$

occupe dans la théorie des équations différentielles. Elle embrasse l'équation de Gauss comme un cas limite, c'est à dire que si l'on fait tendre l'intervalle constant de l'équation aux différences (que nous avons posé égal à 1) vers zéro on trouve l'équation de Gauss.

On connait la méthode intéressante de laquelle Riemann[1] a abordé l'étude de l'équation de Gauss. Nous avons pris un point de départ qui ressemble beaucoup à celui de Riemann. Dans le chapitre I nous démontrerons que les fonctions en question pourront se définir uniquement à l'aide de la nature de leurs points singuliers et sans recourir à aucune représentation analytique des fonctions. On trouve une équation aux différences finies à laquelle doivent satisfaire nos fonctions. M. J. Thomae[2] a étudiè ces fonctions en procédant d'une manière analogue; je n'avais pas connaissance des Mémoires dé M. J. Thomae au moment de rédiger les pages suivantes, mais j'ai pensé qu'il y avait pourtant intérêt à les publier par ce que le système de conditions dont je suis parti est beaucoup plus simple que celui de M. J. Thomae. D'ailleurs il y a bien d'objections à faire aux démonstrations de M. J. Thomae.

La représentation effective de nos fonctions se fait le plus aisément à l'aide de séries de facultés. L'équation aux différences trouvée admet pour solutions un très grand nombre de séries de facultés hypergéométriques; je forme quelques uns de ces séries dans les chapitres II et III. Par cause du symmétrie remarquable de l'équation aux différences on peut se borner à écrire effectivement un petit nombre entre elles, les autres s'obtiennent par des permutations et de simples transformations.

Dans le chapitre III je démontrerai que l'équation aux différences est satisfaite par certaines intégrales définies qui embrassent comme cas limite les intégrales hypergéométriques

$$\int (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-z)^{\gamma-1}dt.$$

[1] Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen. Mathematische Werke 1892 p. 67.

[2] Journal für die reine und angewandte Mathematik t. 87, p. 26—74; t. 110, p. 78. Zeitschrift für Mathematik und Physik t. 16, p. 146—158 et p. 428—439.

Ces intégrales, qui contiennent des fonctions gamma sous le signe d'intégration, rentrent dans une classe d'integrales qui ont été étudiées par MM. Mellin,[1] Pincherle[2] et Barnes[3] d'un point de vue différent.

Je pense revenir plus tard, d'un autre point de vue, à l'étude des transcendantes susdites qui se classent parmi les plus intéressantes de l'Analyse.

Chapitre I.

Détermination d'une équation aux différences finies à l'aide de la nature analytique de ses solutions.

Je me propose de trouver une fonction jouissant des propriétés suivantes:

1°. Elle est uniforme et méromorphe dans tout le plan.

2°. Entre trois déterminations de la fonction en un même point il existe une relation linéaire et homogène à coefficients périodiques avec la période 1.

3°. Il y a deux déterminations $U^{(\beta)}(x)$ et $U^{(\beta')}(x)$ de la fonction qui sont holomorphes au voisinage de tout point à distance finie, en exceptant les points α, $\alpha-1$, $\alpha-2$, $\ldots$; α', $\alpha'-1$, $\alpha'-2$, $\ldots$ qui sont des pôles simples; ces déterminations se représentent sous la forme

$$U^{(\beta)}(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}\left(1+\frac{\varepsilon(x)}{x}\right),\quad U^{(\beta')}(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta'}\left(1+\frac{\varepsilon'(x)}{x}\right),\text{[4]}$$

$\varepsilon(x)$ et $\varepsilon'(x)$ étant des fonctions qui tendent uniformément vers une constante quand x tend vers l'infini le long d'une droite quelconque qui forme avec l'axe des nombres positifs un angle

[1] Grundzüge einer einheitlichen Theorie der Gamma- und Hypergeometrischen Funktionen. Helsinki 1909. Acta mathematica t. 25, p. 139.

[2] Rendiconti del R. Ist. Lombardo série 2, t. 19, 1886. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei t. 4, 1888.

[3] Proceedings of the London mathematical Society, série 2, t. 6, p. 141—177, 1908.

[4] On suppose que l'argument de x (de $-x$) est égal à zéro pour des valeurs très grandes et positives (négatives) de x.

qui est, en valeur absolue, $\leqq \frac{\pi}{2}$. Il y a deux autres déterminations de la fonction $\overline{U}^{(\beta)}(x)$ et $\overline{U}^{(\beta')}(x)$ qui sont holomorphes au voisinage de tout point à distance finie en exceptant les points γ, $\gamma+1$, $\gamma+2, \ldots$; γ', $\gamma'+1$, $\gamma'+2, \ldots$ qui sont des pôles simples. Ces déterminations se représentent sous la forme

$$\overline{U}^{(\beta)}(x) = \left(\frac{-1}{x}\right)^{\beta}\left(1+\frac{\bar{\varepsilon}(x)}{x}\right), \quad \overline{U}^{(\beta')}(x) = \left(\frac{-1}{x}\right)^{\beta'}\left(1+\frac{\bar{\varepsilon}'(x)}{x}\right),^{1}$$

$\bar{\varepsilon}(x)$ et $\bar{\varepsilon}'(x)$ étant des fonctions qui tendent uniformément vers une constante quand x tend vers l'infini le long d'une droite quelconque qui forme avec l'axe des nombres négatifs un angle qui est, en valeur absolue, $\leqq \frac{\pi}{2}$.

4°. Entre les constantes α, α', ... il existe la relation $\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = \alpha+\alpha'+3$.

On suppose en plus que β est différent de β', mais il n'est pas nécessaire de supposer que les α et les γ sont différents. Si $\alpha-\alpha'$ est égal à un entier positif n, on suppose que les points $\alpha-n$, $\alpha-n-1$, $\alpha-n-2, \ldots$ sont des pôles doubles.

Soit $U(x)$ la fonction cherchée et soit $U_1(x)$ et $U_2(x)$ deux déterminations de cette fonction telles que le quotient $U_1(x) : U_2(x)$ n'est pas égal à une fonction périodique avec la période 1. $U(x)$ satisfait, en vertu de 2°, à l'équation

$$\begin{vmatrix} U(x) & U(x+1) & U(x+2) \\ U_1(x) & U_1(x+1) & U_1(x+2) \\ U_2(x) & U_2(x+1) & U_2(x+2) \end{vmatrix} = 0$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$U(x+2) + p_1(x)\, U(x+1) + p_0(x)\, U(x) = 0, \tag{1}$$

où

$$p_0(x) = \begin{vmatrix} U_1(x+1) & U_1(x+2) \\ U_2(x+1) & U_2(x+2) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} U_1(x) & U_1(x+1) \\ U_2(x) & U_2(x+1) \end{vmatrix}, \tag{2}$$

$$p_1(x) = -\begin{vmatrix} U_1(x) & U_1(x+2) \\ U_2(x) & U_2(x+2) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} U_1(x) & U_1(x+1) \\ U_2(x) & U_2(x+1) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

[1] On suppose que l'argument de x (de $-x$) est égal à zéro pour des valeurs très grandes et positives (négatives) de x.

Au lieu de U_1 et U_2 on peut par exemple prendre l'une ou l'autre des deux déterminations susdites. Posons pour abréger

$$D(x) = \begin{vmatrix} U^{(\beta)}(x) & U^{(\beta)}(x+1) \\ U^{(\beta')}(x) & U^{(\beta')}(x+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U^{(\beta)}(x) & \Delta U^{(\beta)}(x) \\ U^{(\beta')}(x) & \Delta U^{(\beta')}(x) \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$\bar{D}(x) = \begin{vmatrix} \bar{U}^{(\beta)}(x) & \bar{U}^{(\beta)}(x+1) \\ \bar{U}^{(\beta')}(x) & \bar{U}^{(\beta')}(x+1) \end{vmatrix}, \quad (5)$$

et remarquons qu'on a

$$\Delta U^{(\beta)}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta+1} \{-\beta + \varepsilon_1(x)\}, \quad (6)$$

$\varepsilon_1(x)$ étant une fonction qui tend vers zèro quand x tend vers l'infini. $D(x)$ est donc de la forme

$$D(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta+\beta'+1} \begin{vmatrix} 1 + \frac{\varepsilon(x)}{x}, & -\beta + \varepsilon_1(x) \\ 1 + \frac{\varepsilon'(x)}{x}, & -\beta' + \varepsilon'_1(x) \end{vmatrix}. \quad (7)$$

On a par conséquent uniformément

$$\lim_{x=\infty} x^{\beta+\beta'+1} D(x) = \beta - \beta', \quad (8)$$

x tendant vers l'infini en restant dans le demi-plan $\Re(x) > k$, où k désigne un nombre réel quelconque. De même on démontre qu'on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} (-x)^{\beta+\beta'+1} \bar{D}(x) = \beta' - \beta, \quad (9)$$

x tendant vers l'infini en restant dans le demi-plan $\Re(x) < \bar{k}$, $\bar{k}$ étant un nombre réel quelconque. On a en vertu de (2)

$$p_0(x) = \frac{D(x+1)}{D(x)} = \frac{\bar{D}(x+1)}{\bar{D}(x)}. \quad (10)$$

$D(x)$ et $\bar{D}(x)$ sont des fonctions méromorphes de x, $p_0(x)$ est par conséquent une fonction méromorphe qui tend uniformément vers 1 quand x tend vers l'infini d'une manière quelconque. Il en résulte que $p_0(x)$ est une fonction rationnelle de x de la forme

$$p_0(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)\,..\,(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\,..\,(x-b_n)}.$$

Il s'agit maintenant de déterminer n et les nombres a_1, a_2 .. b_1, b_2, ... De la relation

$$D(x+1)=p_0(x)\,D(x)$$

on conclut que

$$D(x)=\frac{\Gamma(x-a_1)\,\Gamma(x-a_2)\,..\,\Gamma(x-a_n)}{\Gamma(x-b_1)\,\Gamma(x-b_2)\,..\,\Gamma(x-b_n)}\pi(x),$$

$\pi(x)$ étant une fonction périodique. Multiplions les deux membres par $x^{\beta+\beta'+1}$ et faisons tendre x vers l'infini par valeurs positives. Le premier membre tend vers $\beta-\beta'$, il doit donc en être de même du second membre. On a par conséquent $\pi(x)=\beta-\beta'$ et

$$\beta+\beta'+1+\sum_{i=1}^{i=n}(b_i-a_i)=0. \tag{11}$$

De la même manière on démontre que

$$\bar{D}(x)=\frac{\Gamma(1+b_1-x)\,\ldots\,\Gamma(1+b_n-x)}{\Gamma(1+a_1-x)\,\ldots\,\Gamma(1+a_n-x)}(\beta'-\beta).$$

Des expressions (4) et (5) résulte que $D(x)$ ($\bar{D}(x)$) admet les points α et α' ($\gamma-1$ et $\gamma'-1$) comme pôles simples et les points $\alpha-1$, $\alpha-2$, ..., $\alpha'-1$, $\alpha'-2$, ... (γ, $\gamma+1$, $\gamma+2$, ... γ', $\gamma'+1$, $\gamma'+2$, ...) comme pôles simples ou doubles. Si le premier cas a lieu, on a $n=2$ et

$$D(x)=\frac{\Gamma(x-\alpha)\,\Gamma(x-\alpha')}{\Gamma(x+2-\gamma)\,\Gamma(x+2-\gamma')}(\beta-\beta') \tag{12}$$

$$\bar{D}(x)=\frac{\Gamma(\gamma-1-x)\,\Gamma(\gamma'-1-x)}{\Gamma(\alpha+1-x)\,\Gamma(\alpha'+1-x)}(\beta'-\beta) \tag{13}$$

$$p_0(x)=\frac{(x-\alpha)(x-\alpha')}{(x-\gamma+2)(x-\gamma'+2)} \tag{14}$$

et on vérifie que la relation (11) est satisfaite, car on a par hypothèse $\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=\alpha+\alpha'+3$. Si le second cas a lieu, on a $n=4$ et

$$a_1 = a,\ a_2 = a',\ a_3 = a - 1,\ a_4 = a' - 1$$
$$b_1 = \gamma - 2,\ b_2 = \gamma' - 2,\ b_3 = \gamma - 1,\ b_4 = \gamma' - 1.$$

Je veux démontrer que ce cas ne peut pas arriver, c'est à dire que les pôles sont nécessairement simples. Par hypothèse il existe des relations de la forme

$$U^{(\beta)}(x) = \pi_1(x)\,\overline{U}^{(\beta)}(x) + \pi_2(x)\,\overline{U}^{(\beta')}(x)$$
$$U^{(\beta)}(x+1) = \pi_1(x)\,\overline{U}^{(\beta)}(x+1) + \pi_2(x)\,\overline{U}^{(\beta')}(x+1),$$

$\pi_1(x)$ et $\pi_2(x)$ étant des fonctions périodiques. En résolvant on trouve

$$\pi_1(x) = \begin{vmatrix} U^{\beta}(x) & \overline{U}^{\beta'}(x) \\ U^{\beta}(x+1) & \overline{U}^{\beta'}(x+1) \end{vmatrix} : \overline{D}(x).$$

Le numérateur admet les points a, $a-1$, $a-2$, $\ldots$ a', $a'-1$, $a'-2$, $\ldots$ pour pôles simples. Le dénominateur admet les points a et a' pour zéros simples et les points $a+1$, $a+2$ $\ldots$ $a'+1$, $a'+2$, $\ldots$ pour zéros doubles. Mais cela est impossible, puisque $\pi_1(x)$ est périodique. On a donc nécessairement $n = 2$, et $p_0(x)$ est toujours de la forme (14). Ce résultat est important pour nous. Désignons par R_n et R_n' les résidus de $U^{(\beta)}(x)$ et $U^{(\beta')}(x)$ dans le point $a-n$. Les pôles de $D(x)$ étant simples, en général, on a nécessairement les relations

$$\frac{R_0}{R_0'} = \frac{R_1}{R_1'} = \frac{R_2}{R_2'} = \ldots \frac{R_n}{R_n'} = \ldots \tag{15}$$

c'est à dire les résidus de $U^{(\beta)}(x)$ et de $U^{(\beta')}(x)$ dans les points a, $a-1$, $a-2$, $\ldots$ sont proportionels. Considérons maintenant $p_1(x)$. De l'expression (3) on conclut que $p_1(x)$ est une fonction méromorphe de x qui tend uniformément vers -2 quand x tend vers l'infini d'une manière quelconque.

Si l'on substitue $\overline{U}^{(\beta)}(x)$ et $\overline{U}^{(\beta')}(x)$ dans (3), on voit que le numérateur admet les points $\gamma-2$, $\gamma-1$, $\gamma, \ldots, \gamma'-2$, $\gamma'-1$, $\gamma', \ldots$ pour pôles simples; $p_1(x)$ admet par conséquent les points $\gamma - 2$ et $\gamma' - 2$ pour pôles simples; $p_1(x)$ est d'ailleurs holomorphe, comme on s'en assure aisément en substituant $U^{(\beta)}(x)$ et $U^{(\beta')}(x)$ dans (3) au lieu de $U_1(x)$ et $U_2(x)$. On a par conséquent

$$p_1(x) = -\frac{2x^2 + Ax + B}{(x+2-\gamma)(x+2-\gamma')},$$

A et B étant des constantes qu'il reste à déterminer. Or cela est très facile; l'équation

$$(x+2-\gamma)(x+2-\gamma')\,U(x+2) - (2x^2 + Ax + B)\,U(x+1) + (x-\alpha)(x-\alpha')\,U(x) = 0 \tag{16}$$

doit être identiquement satisfaite par l'expression

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}\left(1 + \frac{\varepsilon(x)}{x}\right),$$

ce qui nous donne les relations

$$A = 4 - \alpha - \alpha' - \gamma - \gamma',$$
$$B = \alpha\alpha' - \beta\beta' + (\gamma - 2)(\gamma' - 2).$$

L'équation (16) peut par conséquent s'écrire sous l'une et l'autre des deux formes suivantes

$$(x-\gamma+2)(x-\gamma'+2)\underset{+1}{\Delta^2}U(x) + \left\{x(1+\beta+\beta') + \beta\beta' + (\gamma-2)(\gamma'-2) - \alpha\alpha'\right\}\underset{+1}{\Delta}U(x) + \beta\beta'\,U(x) = 0 \tag{17}$$

$$(x-\alpha-2)(x-\alpha'-2)\underset{-1}{\Delta^2}U(x) + \left\{x(1+\beta+\beta') - \beta\beta' - (\alpha+2)(\alpha'+2) + \gamma\gamma'\right\}\underset{-1}{\Delta}U(x) + \beta\beta'\,U(x) = 0 \tag{18}$$

où

$$\underset{\omega}{\Delta}\,U(x) = \frac{U(x+\omega) - U(x)}{\omega}.$$

On remarque que ces équations sont symmétriques en α et α', en β et β' et en γ et γ'.

L'existence d'une fonction satisfaisant aux conditions énoncées au debut de ce chapitre est maintenant établie.[1] La fonction la plus générale ayant ces propriétés c'est la solution méromorphe la plus générale de cette équation, contenant deux fonctions périodiques arbitraires. Etudions maintenant les représentations analytiques de cette fonction.

[1] Il suffit de se rappeler les propriétés connues des solutions de l'équation (18); comparez mon mémoire: Sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies par des séries de facultés. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo t. 35, 1913.

Chapitre II.

Développements en séries.

Les solutions de cette équation aux différences finies admettent un grand nombre de développements qui sont d'une forme assez simple. Les plus importants entre eux sont des séries de facultés. Prenons l'équation sous la forme (18) et essayons de trouver une solution de la forme

$$U(x)=\frac{\Gamma(x-\alpha)}{\Gamma(x-\alpha+\rho)}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} g_\nu \frac{\rho(\rho+1)\dots(\rho+\nu-1)}{(x-\alpha+\rho)(x-\alpha+\rho+1)\dots(x-\alpha+\rho+\nu-1)}.$$

En formant les différences finies on trouve

$$(-1)^i(x-\alpha-1)\dots(x-\alpha-i)\mathop{\Delta^i}_{-1} U(x)$$
$$=\frac{\Gamma(x-\alpha)}{\Gamma(x-\alpha+\rho)}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} g_\nu \frac{\rho(\rho+1)\dots(\rho+\nu+i-1)}{(x-\alpha+\rho)\dots(x-\alpha+\rho+\nu-1)} \qquad (i=1,2)$$

Substituons ces développements dans l'équation (18), on trouve en posant

$$f_0(\rho)=(\rho-\beta)(\rho-\beta'),\quad f_1(\rho)=(\rho+\gamma-\alpha-1)(\rho+\gamma'-\alpha-1)$$

le développement

$$f_0(\rho)\,g_0\cdot(x-\alpha+\rho-1)+\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{\rho(\rho+1)\dots(\rho+\nu)\,[f_0(\rho+\nu+1)g_{\nu+1}-f_1(\rho+\nu)g_\nu]}{(x-\alpha+\rho)(x-\alpha+\rho+1)\dots(x-\alpha+\rho+\nu-1)}$$

qui doit être identiquement zéro. Les coefficients g_1, g_2, g_3, ... se déterminent donc par la formule de récurrence

$$g_{\nu+1}=\frac{f_1(\rho+\nu)}{f_0(\rho+\nu+1)}g_\nu$$

et le nombre ρ doit être égal à β ou à β'. Nous supposons dès maintenant pour abréger que la différence $\beta-\beta'$ n'est pas un entier. Le détermination des coefficients g_ν est alors toujours possible. Posons

$$F(\alpha,\beta,\gamma;\delta,x)=1+\frac{\alpha\beta\gamma}{1\cdot\delta\cdot x}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1)}{1\cdot 2\delta(\delta+1)x(x+1)}+\dots \qquad (19)$$

où la série est absolument convergente, si $\Re(x+\delta-\alpha-\beta-\gamma)>0$. En posant $\rho=\beta$ on trouve donc la solution suivante de l'équation (18)

$$U^{(\beta)}(x)=\frac{\Gamma(x-\alpha)}{\Gamma(x-\alpha+\beta)}F(\beta+\gamma-\alpha-1, \beta+\gamma'-\alpha-1, \beta; \beta-\beta'+1, x-\alpha+\beta) \tag{20}$$

que nous désignerons par $U^{(\beta)}(x)$. La série est convergente, si $\Re(x-\alpha')>0$, et représente une fonction holomorphe dans ce domaine. En permutant β et β' on trouve une nouvelle solution que nous désignerons par $U^{(\beta')}(x)$. Ces solutions admettent les points α, $\alpha-1$, $\alpha-2, \ldots \alpha'$, $\alpha'-1$, $\alpha'-2, \ldots$ pour pôles simples; on s'en assure immédiatement à l'aide de l'équation (16). Elles se comportent asymptotiquement de la manière indiquée dans le Chapitre I.

L'équation aux différences est symmétrique en α et α'; en écrivant dans le second membre de (20) α' au lieu de α on obtient donc de nouveau une solution; désignons cette solution par $U_1(x)$. Comme $U^{(\beta)}(x)$ et $U^{(\beta')}(x)$ sont linéairement indépendantes, il existe une relation de la forme

$$U_1(x)=\pi_1(x)\, U^{(\beta)}(x)+\pi_2(x)\, U^{(\beta')}(x),$$

$\pi_1(x)$ et $\pi_2(x)$ étant des fonctions périodiques.

Multiplions les deux membres de cette équation par x^{β} et faisons tendre x vers l'infini par des valeurs positives. Comme $\beta-\beta'$ n'est pas un entier, on voit sans peine que $\pi_2(x)=0$ et $\pi_1(x)=1$. On a donc

$$U^{(\beta)}(x)=\frac{\Gamma(x-\alpha')}{\Gamma(x-\alpha'+\beta)}F(\beta+\gamma-\alpha'-1, \beta+\gamma'-\alpha'-1, \beta; \beta-\beta'+1, x-\alpha'+\beta) \tag{21}$$

la série étant convergente, si $\Re(x-\alpha)>0$. En égalant les seconds membres de (20) et (21) on trouve une formule de transformation pour les séries hypergéométriques qui, avec des notations changées, s'écrit comme il suit

$$F(\alpha, \beta, \gamma; \delta, x)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x-\alpha-\beta-\gamma+\delta)}{\Gamma(x-\gamma)\,\Gamma(x-\alpha-\beta+\delta)}F(\delta-\alpha, \delta-\beta, \gamma; \delta, x-\alpha-\beta+\delta). \tag{22}$$

Cette formule est valable pourvu que $\Re(x-\gamma)>0$, $\Re(x-\alpha-\beta-\gamma+\delta)>0$. Dans le cas limite d'une équation différentielle la formule (22) se réduit à la formule bien connu

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{z}{z-1}\right)$$

F désignant cette fois la série de puissances

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}z^2+\dots \quad (23)$$

En appliquant la transformation (22) à la série de facultés (20) on obtient un grand nombre d'autres développements que nous nous dispenserons d'écrire explicitement; on les trouve indiqués dans le Mémoire cité de M. Thomae.

Il est facile de trouver les résidus de $U^{(\beta)}(x)$ et de $U^{(\beta')}(x)$ dans les points α et α'. La série au second membre de (20) par exemple se réduit, si $x=\alpha$, à une série hypergéométrique de la forme (23) où $z=1$. Or la somme d'une telle série s'exprime par des fonctions gamma comme l'a démontré Gauss. On a par conséquent

$$\lim_{x=\alpha}(x-\alpha)\,U^{(\beta)}(x)=\frac{\Gamma(1+\beta-\beta')\,\Gamma(\alpha-\alpha')}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(2+\alpha-\gamma-\beta')\,\Gamma(2+\alpha-\gamma'-\beta')}; \quad (24)$$

ce résultat se trouve démontré sous l'hypothèse $\Re(\alpha-\alpha')>0$, car sans cela la série (20) n'est pas convergente pour $x=\alpha$; mais en transformant cette série convenablement à l'aide de la formule (22) on obtient des nouvelles séries avec d'autres domaines de convergence et on s'assure aisément que la condition $\Re(\alpha-\alpha')>0$ n'est pas nécessaire. Seulement il faut supposer que $\alpha-\alpha'$ n'est pas un entier négatif. En ce cas α est en effet un pôle double de $U^{(\beta)}(x)$. Le résidu dans le point α' se trouve en permutant α et α'. Les résidus de $U^{(\beta')}(x)$ se trouvent en permutant β et β'.

Pour x égal $\gamma-1$ ou $\gamma'-1$ les valeurs de $U^{(\beta)}(x)$ s'expriment aussi par des fonctions gamma. La série (20) se réduit en effet en ces cas encore à une série de Gauss, et on trouve

$$U^{(\beta)}(\gamma-1)=\frac{\Gamma(1+\beta-\beta')\,\Gamma(\gamma-\alpha-1)\,\Gamma(\gamma-\alpha'-1)}{\Gamma(1-\beta')\,\Gamma(\gamma-\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\gamma-\alpha'+\beta-1)}. \tag{25}$$

Notre équation aux différences ne change pas si l'on fait la substitution suivante

$$\begin{pmatrix} x & \alpha & \alpha' & \gamma & \gamma' \\ -x & -\gamma & -\gamma' & -\alpha & -\alpha' \end{pmatrix}; \tag{26}$$

on le vérifie très aisément en écrivant l'équation sous la forme (16). En faisant cette substitution dans les séries de facultés qui représentent $U^{(\beta)}(x)$ et $U^{(\beta')}(x)$ on obtient donc des nouvelles solutions que nous désignerons par $\bar{U}^{(\beta)}(x)$ et $\bar{U}^{(\beta')}(x)$. On a par exemple

$$\bar{U}^{(\beta)}(x)=\frac{\Gamma(\gamma-x)}{\Gamma(\beta+\gamma-x)}\,F(\beta+\gamma-\alpha-1,\beta+\gamma-\alpha'-1,\beta;1+\beta-\beta',\beta+\gamma-x) \tag{27}$$

la série étant convergente pourvu que l'on ait $\Re(x-\gamma)<0$. Les solutions $\bar{U}^{(\beta)}(x)$ et $\bar{U}^{(\beta')}(x)$ sont linéairement indépendantes; elles admettent les points γ, $\gamma+1$, $\gamma+2$, $\ldots$, γ', $\gamma'+1$, $\gamma'+2$, ... pour pôles simples, et elles sont holomorphes au voisinage de tout autre point à distance finie. De la même manière que plus haut on démontre les égalités

$$\lim_{x=\gamma}(\gamma-x)\,\bar{U}^{(\beta)}(x)=\frac{\Gamma(1+\beta-\beta')\,\Gamma(\gamma'-\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(2+\alpha-\gamma-\beta')\,\Gamma(2+\alpha'-\gamma-\beta')} \tag{28}$$

$$\bar{U}^{(\beta)}(\alpha+1)=\frac{\Gamma(1+\beta-\beta')\,\Gamma(\gamma-\alpha-1)\,\Gamma(\gamma'-\alpha-1)}{\Gamma(1-\beta')\,\Gamma(\gamma-\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\gamma'-\alpha+\beta-1)}. \tag{29}$$

Les quatre solutions $U^{(\beta)}$, $U^{(\beta')}$, $\bar{U}^{(\beta)}$, $\bar{U}^{(\beta')}$ sont les types les plus caractéristiques de la classe de fonctions définies par les propriétés énoncées au debut. Il existe entre elles des relations linéaires à coefficients périodiques que nous allons maintenant déterminer.

Posons

$$\begin{aligned} \bar{U}^{(\beta)}(x)&=(\bar{\beta},\beta)\,U^{(\beta)}(x)+(\bar{\beta},\beta')\,U^{(\beta')}(x)\\ \bar{U}^{(\beta')}(x)&=(\bar{\beta}',\beta)\,U^{(\beta)}(x)+(\bar{\beta}',\beta')\,U^{(\beta')}(x) \end{aligned} \tag{30}$$

$(\bar{\beta},\beta)$ etc. étant des fonctions périodiques de x avec la période 1. On a évidemment

$$(\bar{\beta},\beta)=\begin{vmatrix} \bar{U}^{(\beta)}(x) & U^{(\beta')}(x) \\ \bar{U}^{(\beta)}(x+1) & U^{(\beta')}(x+1) \end{vmatrix} : D(x)$$

$$(\bar{\beta},\beta')=\begin{vmatrix} U^{(\beta)}(x) & \bar{U}^{(\beta)}(x) \\ U^{(\beta)}(x+1) & \bar{U}^{(\beta)}(x+1) \end{vmatrix} : D(x)$$

De ces expressions on conclut d'une part que $(\bar{\beta},\beta)$ et $(\bar{\beta},\beta')$ n'admettent d'autres points singuliers à distance finie que les points $\gamma,\ \gamma\pm 1,\ \gamma\pm 2,\dots,\gamma',\ \gamma'\pm 1,\ \gamma'\pm 2,\dots$ qui sont des pôles simples. D'autre part en posant $x=\sigma+i\tau$ on a uniformément dans tout intervalle $a\leq\sigma\leq a+1$

$$\lim_{\tau=\pm\infty}(\bar{\beta},\beta')=0$$

$$\lim_{\tau=\pm\infty}(\bar{\beta},\beta)=\begin{cases} e^{\pi i\beta} \\ e^{-\pi i\beta} \end{cases}$$

x tendant vers l'infini le long d'une droite perpendiculaire à l'axe des nombres réels. Pour le voir il suffit de se rappeller la manière d'où se comportent asymptotiquement nos solutions. De ces deux propriétés il résulte qu'on ait

$$(\bar{\beta},\beta)=\frac{\sin\pi(x-A)\sin\pi(x-B)}{\sin\pi(x-\gamma)\sin\pi(x-\gamma')}$$

$$(\bar{\beta},\beta')=\frac{C}{\sin\pi(x-\gamma)\sin\pi(x-\gamma')}$$

A, B et C étant des constantes qu'il reste à déterminer. En posant dans la première des équations (29) successivement $x'=\gamma-1$ et $x=\gamma'-1$ on obtient deux équations d'où on déduit la relation

$$\frac{\sin\pi(\gamma-A)\sin\pi(\gamma-B)}{\sin\pi(\gamma'-A)\sin\pi(\gamma'-B)}=\frac{\sin\pi(\gamma-a+\beta')\sin\pi(\gamma-a'+\beta')}{\sin\pi(\gamma-a+\beta)\sin\pi(\gamma-a'+\beta)}$$

On trouve par là sans peine les expressions

$$(\bar{\beta},\beta)=\frac{\sin\pi\beta\cos\pi(a-a')+\sin\pi\beta'\cos\pi(\gamma-\gamma')+\sin\pi(\beta-\beta')\cos\pi(2x-\beta-\gamma-\gamma')}{2\sin\pi(\beta'-\beta)2\sin\pi(x-\gamma)\sin\pi(x-\gamma')} \tag{31}$$

$$(\bar{\beta},\beta')= \tag{32}$$

$$\frac{\Gamma(1+\beta-\beta')\,\Gamma(\beta-\beta')}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\beta')}\,\frac{\Gamma(\gamma-a+\beta'-1)\,\Gamma(\gamma-a'+\beta'-1)}{\Gamma(\gamma-a+\beta-1)\,\Gamma(\gamma-a'+\beta-1)}\,\frac{\sin\pi(a-\beta'-\gamma)\sin\pi(a-\beta-\gamma')}{\sin\pi(x-\gamma)\sin\pi(x-\gamma')}$$

En permutant β et β' les seconds membres de (31) et de (32) deviennent réspectivement égaux à $(\bar{\beta'},\beta')$ et $(\bar{\beta'},\beta)$. Si dans les équations (30) on effectue le substitution (26), on trouve les relations

$$\begin{aligned} U^{(\beta)}(x) &= (\beta,\bar{\beta})\,\bar{U}^{(\beta)}(x) + (\beta,\bar{\beta'})\,\bar{U}^{(\beta')}(x) \\ U^{(\beta')}(x) &= (\beta',\bar{\beta})\,\bar{U}^{(\beta)}(x) + (\beta',\bar{\beta'})\,\bar{U}^{(\beta')}(x), \end{aligned} \tag{33}$$

où

$$(\beta,\bar{\beta}) = \frac{\sin\pi\beta\cos\pi(\gamma-\gamma') + \sin\pi\beta'\cos\pi(\alpha-\alpha') + \sin\pi(\beta-\beta')\cos\pi(2x+\beta-\alpha-\alpha')}{2\sin\pi(\beta'-\beta)\sin\pi(x-\alpha)\sin\pi(x-\alpha')}, \tag{34}$$

$$(\beta,\bar{\beta'}) = \tag{35}$$

$$\frac{\Gamma(1+\beta-\beta')\,\Gamma(\beta-\beta')}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\beta')}\,\frac{\Gamma(\gamma-\alpha+\beta'-1)\,\Gamma(\gamma'-\alpha+\beta'-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\gamma'-\alpha+\beta-1)}\,\frac{\sin\pi(\gamma+\beta'-\alpha)\sin\pi(\gamma+\beta-\alpha')}{\sin\pi(x-\alpha)\sin\pi(x-\alpha')}$$

en permutant β et β' ces expressions deviennent réspectivement égales à $(\beta',\bar{\beta'})$ et à $(\beta',\bar{\beta})$.

Nous avons déjà vu comment se comportent asymptotiquement les fonctions $U^{(\beta)}(x)$ et $U^{(\beta')}(x)$ dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{\pi}{2}$. Les relations (33) permettent de voir comment elles se comportent dans tout voisinage de l'infini. Nous pouvons résumer nos résultats relativement à ces fonctions en le théorème suivant:

Les solutions $U^{(\beta)}(x)$ et $U^{(\beta')}(x)$ sont linéairement indépendantes. Ce sont des fonctions analytiques n'admettant d'autres points singuliers que les pôles α, $\alpha-1$, $\alpha-2, \ldots,$ α', $\alpha'-1$, $\alpha'-2, \ldots.$ Quand x tend vers l'infini dans l'angle $\pi-\varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi+\varepsilon$, ε étant un nombre positif, on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} x^{\beta}\,U^{(\beta)}(x) = 1, \quad \lim_{x=\infty} x^{\beta'}\,U^{(\beta')}(x) = 1. \tag{36}$$

Quand x tend vers l'infini le long d'une droite parallèle à l'axe des nombres négatifs, ces limites n'existent pas en génèral, mais les relations (33) montrent même en ce cas comment se comportent asymptotiquement les deux solutions.

Il y a lieu de se demander si on ne pouvait disposer des constantes α, $\beta, \ldots$ de telle manière que l'une au moins des limites (36), la première par exemple, existe quand x tend vers l'infini d'une manière quelconque. Pour qu'il fût ainsi, il faudrait d'abord que $(\beta, \bar{\beta})$ fût égal à $e^{\pi i \beta}$. C'est le cas si β est égal à un entier et si en même temps la différence $2(\alpha - \alpha')$ est égal à un entier impair $2n+1$. On a en effet en ce cas

$$(\beta, \bar{\beta}) = -\frac{\cos \pi (2x - 2\alpha + n + \frac{1}{2} + \beta)}{2 \sin \pi (x - \alpha) \sin \pi (x - \alpha + n + \frac{1}{2})} = (-1)^{\beta}.$$

Supposons en plus que la partie réelle de β' est plus petite que β. $U^{(\beta)}(x)$ est alors une fonction qui possède la propriété demandée. Le cas où β est positif est seul intéressant, car si β est égal à un entier négatif ou nul la série (20) ne contient qu'un nombre fini de termes et $U^{(\beta)}(x)$ se réduit à un polynome. Supposons en particulier que $\alpha = 0$, $\alpha' = -\frac{1}{2}$ et $\beta > 0$. La fonction $U^{(\beta)}(x)$ possède alors les propriétés suivantes:

1°. Elle n'admet d'autres points singuliers à distance finie que les pôles $0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \ldots$

2°. Si l'on exclue du plan ces pôles par des aires aussi petites que l'on veut et si l'on fait tendre x vers l'infini dans le plan ainsi coupé, la fonction $x^{\beta} U^{(\beta)}(x)$ tend uniformément vers 1.

Chapitre III.

Représentation des solutions par des intégrales définies.

Reprenons l'équation (16); on peut l'écrire sous la forme suivante

$$Q(x)\,U(x)+(\gamma-x-1)\underset{+1}{\Delta}Q(x)\,U(x+1)+(\gamma-x-1)(\gamma-x-2)\frac{\underset{+1}{\Delta^2}Q(x)}{2!}U(x+2)=$$
$$(\gamma-x-1)P(x)\,U(x+1)+(\gamma-x-1)(\gamma-x-2)\underset{+1}{\Delta}P(x)\,U(x+2) \qquad (37)$$

où l'on a posé

$$Q(x)=(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\gamma-1),$$
$$P(x)=(x-\beta-\gamma+2)(x-\beta'-\gamma+2).$$

Essayons de satisfaire à cette équation par une intégrale de la forme

$$U(x)=\Gamma(\gamma-x)\int\frac{v(t)\,dt}{\Gamma(t-x+1)}, \qquad (38)$$

$v(t)$ étant une fonction à déterminer. En substituant cette intégrale dans l'équation aux différences (37) on trouve

$$\Gamma(\gamma-x)\int\frac{v(t)}{\Gamma(t-x+1)}\Big(Q(t)-(t-x)P(t-1)\Big)\,dt=0 \quad (39)$$

Déterminous $v(t)$ comme une solution de l'équation aux différences finies

$$v(t+1)=\frac{Q(t)}{P(t)}v(t);$$

l'équation (39) peut s'écrire

$$\int\left[\frac{v(t)\,Q(t)}{\Gamma(t-x+1)}-\frac{v(t-1)\,Q(t-1)}{\Gamma(t-x)}\right]dt;$$

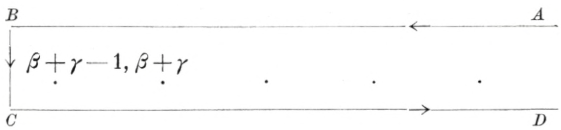
notre intégrale satisfait donc à l'équation (37) si le chemin d'intégration a été choisi de telle sorte que la valeur de l'intégrale ne soit pas altérée si l'on déplace le chemin d'intégration une longeur égale à 1 parallèle à l'axe des nombres réels. Soit $\pi(t)$ une fonction périodique avec la période 1, on a donc

$$U(x)=\int_L\frac{\Gamma(\gamma-x)\,\Gamma(t-\gamma+1)\,\Gamma(t-\alpha)\,\Gamma(t-\alpha')\,\pi(t)}{\Gamma(t-x+1)\,\Gamma(t-\beta-\gamma+2)\,\Gamma(t-\beta'-\gamma+2)}\,dt. \quad (40)$$

Prenons par exemple

$$\pi(t)=\frac{1}{e^{2\pi i(t-\beta-\gamma)}-1}$$

et pour ligne d'integration L un lacet partant de l'infini dans la direction de l'axe des nombres positif pour y revenir, comprenant les pôles $\beta+\gamma-1$, $\beta+\gamma$, $\beta+\gamma+1$, ... et laissant à son extérieur les autres pôles de la fonction sous le signe d'intégration. On peut le former par exemple des droites AB, CD et BC parallèles réspectivement à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées.



On a dans ce cas

$$\lim_{t=\infty} \frac{t^{\gamma'-x+1} v(t)}{\Gamma(t-x+1)\,\pi(t)} = 1,$$

l'integrale est donc convergente si l'on a $\Re(x-\gamma')<0$. En remarquant que l'intégrale est égale à la somme des résidus de la fonction sous le signe dans les points $\beta+\gamma-1$, $\beta+\gamma$, $\beta+\gamma+1$, ... on trouve le développement

$$C\,\frac{\Gamma(\gamma-x)}{\Gamma(\beta+\gamma-x)}\,F(\beta, \beta+\gamma-\alpha-1, \beta+\gamma-\alpha'-1\,; \beta-\beta'+1, \beta+\gamma-x),$$

C étant une constante. Notre intégrale est donc, au facteur constant C près, égale à $\overline{U}^{(\beta)}(x)$.

En permutant β et β' on trouve une intégrale qui représente $\overline{U}^{(\beta')}(x)$ dans le domaine $\Re(x-\gamma')<0$.

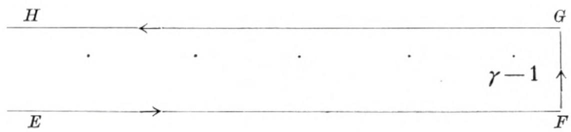
Effectuons la substitution (26) dans l'intégrale (40), on trouve

$$\int_L \frac{\Gamma(x-\alpha)\,\Gamma(t+\alpha+1)\,\Gamma(t+\gamma)\,\Gamma(t+\gamma')\,\pi(t)}{\Gamma(t+x+1)\,\Gamma(t-\beta+\alpha+2)\,\Gamma(t-\beta'+\alpha+2)}\,dt \qquad (41)$$

Posons

$$\pi(t) = \frac{1}{e^{2\pi i(t-\beta+\alpha)}-1}$$

et prenons pour ligne d'intégration un lacet de la forme $ABCD$ entourant les pôles $\beta-\alpha-1$, $\beta-\alpha$, $\beta-\alpha+1$, ... et laissant à son extérieur les autres pôles; on obtient une intégrale qui est convergente dans le demi-plan $\Re(x-\alpha')>0$ et qui, dans ce domaine, représente la solution $U^{(\beta)}(x)$ multipliée par un facteur constant. On obtient $U^{(\beta')}(x)$ en permutant β et β'. Nous avons ainsi retrouvé nos quatre solutions du chapitre précedent. On pourra former une infinité d'autres solutions en disposant convenablement de $\pi(t)$. Posons par exemple dans l'intégrale (40) $\pi(t)=1$ et prenons pour ligne d'intégration un lacet de la forme $EFGH$ entourant les pôles $\gamma-1$, $\gamma-2$, $\gamma-3$, ... et laissant à son extérieur les autres pôles;



on obtient une solution que nous désignerons par $U^{(\gamma')}(x)$ et qui se représente par la série de facultés

$$U^{(\gamma')}(x)=C_1\,F(x-\gamma+1,\beta,\beta';\,\alpha-\gamma+2,\alpha'-\gamma+2),$$

C_1 étant un facteur constant, la série et l'intégrale étant convergentes dans le demi-plan $\Re(x-\gamma')<0$. Cette solution n'admet d'autres points singuliers à distance finie que les points γ', $\gamma'+1$, $\gamma'+2$, ... qui sont des pôles simples. On le vérifie immédiatement en appliquant à la série précedente la transformation (22). En permutant γ et γ' on obtient une solution $U^{(\gamma)}(x)$ qui admet pour pôles les points γ, $\gamma+1$, $\gamma+2$, ... $U^{(\gamma)}(x)$ et $U^{(\gamma')}(x)$ sont linéairement indépendantes. Ce sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des solutions $\overline{U}^{(\beta)}(x)$ et $\overline{U}^{(\beta')}(x)$.

En posant dans l'intégrale (41) $\pi(t)=\sin\pi(x-\alpha)$ et en prenant pour ligne d'intégration un lacet de la forme $EFGH$ entourant les pôles $-\alpha-1$, $-\alpha-2$, $-\alpha-3$, ... on obtient une solution que nous désignerons par $U^{(\alpha')}(x)$. En remarquant que cette intégrale est égale à la somme des résidus dans les points $-\alpha-1$, $-\alpha-2$, $-\alpha-3$, ... on trouve le développement en séries de facultés

$$U^{(\alpha')}(x) = C_2\, F(\alpha + 1 - x, \beta, \beta', \alpha - \gamma + 2, \alpha - \gamma' + 2),$$

C_2 étant un facteur constant. Cette série et l'intégrale correspondante convergent si $\Re(x - \alpha') > 0$. On vérifie sans peine que cette solution n'admet d'autres points singuliers à distance finie que les pôles α', $\alpha' + 1$, $\alpha' + 2, \ldots$. En permutant α et α' on obtient une nouvelle solution $U^{(\alpha)}(x)$ ayant les pôles α, $\alpha + 1$, $\alpha + 2, \ldots$. Il existe des relations linéaires à coefficients constants entre les solutions $U^{(\alpha)}(x)$ et $U^{(\alpha')}(x)$ et les solutions $U^{(\beta)}(x)$ et $U^{(\beta')}(x)$. Ces relations permettent de determiner les valeurs asymptotiques de $U^{(\alpha)}(x)$ et $U^{(\alpha')}(x)$.